204	Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes.	Equivalence des normes	Monier 3 Gourdon

On se place sur E, K-ev de dim. finie, où K=ℝ ou ℂ.

I. Normes sur un ev. (M3 p.4-12)

Def 1: $N: E \to \mathbb{R}$ norme sur E ssi: (1)

> $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)
> $\forall x \in E, (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$ (séparation)
> $\forall (x,y) \in E^2, N(x+y) \le N(x) + N(y)$ (ss-additivité)

On appelle Evn tout Ev muni d'une norme.

Prop.1: (inégalité triangulaire renversée).
$\forall (x,y) \in E, \quad \|x-y\| \ge \big|\|x\| - \|y\|\big|$. (2)

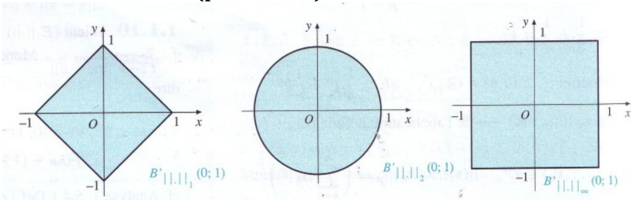
Def.2: Normes usuelles sur K^n. (3)

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (euclid}^{\text{ne}} \text{ ou hermit}^{\text{ne}}\text{)}$$

$$\|x\|_\infty = \underset{1\le k\le n}{Max} |x_k|$$

<u>Boules associées</u> (pour n=2):



Def.3: Dans $(E;\| \ \|)$ evn, on appelle distance associée à la norme $\| \ \|$ l'application:

$$d: E^2 \to \mathbb{R}^+$$
$$(x,y) \mapsto \|x-y\|$$

Toutes les distances ne découlent pas d'une norme, contre-exemple d(x;y)=1 si x≠y, 0 sinon. (*Audrey*).

II. Equivalence de normes. (M3 p.19,53,64)

Def.4: Les normes N et N' sur E sont équivalentes ssi:
$\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \forall x \in E, \alpha N(x) \le N'(x) \le \beta N(x)$.
On notera alors $N \sim N'$.

Prop.2: $\sim$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des normes sur E.

Exple: $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes sur K^n,
et on a: $\| \ \|_\infty \le \| \ \|_2 \le \| \ \|_1 \le n \| \ \|_\infty$,
et $\| \ \|_\infty \le \| \ \|_2 \le \sqrt{n} \| \ \|_\infty$.

Des normes équivalentes définissent les mêmes suites de Cauchy, et les mêmes suites convergentes. (Audrey).

Prop.3: (modifiée) $N \sim N' \Leftrightarrow Id_E : (E,N) \to (E,N')$ est un homéomorphisme. (4)

Th.1: (GOU) Dans un K-evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. (5)

III. Applications.

A. Parties compactes de (E,N). (M3 p.64,71,104)

Th.2: Dans tout K-evn de dimension finie, les parties compactes(6) sont les parties fermées bornées.

Th.3: Tout evn de dimension finie est complet. (7)

Th.4: **Th. de Riesz.** Un evn est de dimension finie ssi sa boule unité fermée est compacte. (8)

B. Applications linéaires. (M3 p.65,50)

Th.5: Soient E, F deux K-evn. Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $f: E \to F$ est continue. (9)

Faux en dimension infinie. Contre-exemple (Gourdon p.50): avec la norme $\left\|\sum_i a_i X^i\right\|$ sur $\mathbb{R}[X]$, l'application linéaire $f: P \mapsto P'$ n'est pas continue; en effet, $f(X^n) = n$ et $\|X^n\| = 1$.

Prop.4: Soient N∈ℕ*, $(E_k, \|..\|_k)_{1\le k\le n}$ des K-evn de dimensions finies, F un K-evn.

Toute application multilinéaire $\varphi: \prod_{k=1}^{N} E_k \to F$ est continue.

Cor: Pour tout n∈ℕ*, l'application $\begin{array}{l}\det: M_n(K) \to K \\ A \mapsto \det(A)\end{array}$ est continue.

IV. Notes.

(1) La sous-additivité correspond à l'inégalité triangulaire, et l'homogénéité au th. de Thalès version 4° (Cf. figures M3 p.8).

(2) $\|x\| = \|(x-y)+y\| \le \|x-y\| + \|y\|$

(3) Plus généralement, on définit la norme de Hölder:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(4) En topologie, un **homéomorphisme** est une application bijective continue entre deux espaces topologiques dont la réciproque est continue:
f continue, f bijective, f^{-1} continue.
Il s'agit d'une "déformation continue"; les deux espaces sont topologiquement les mêmes.

(5) L'hypothèse K=ℝ ou ℂ est capitale, car ce sont des espaces complets. **Dvt: Cf. Gourdon p.49, ou M3 p.64.**
Contre-exemple en dim° ∞: Cf. Mon.3 p.20.

(6) **"Compact" au sens de la Pté de Borel-Lebesgue**: tout recouvrement de E par des ouverts admet un sous-recouvrement fini.
Caractérisation séquentielle d'un compact: *toute suite de X admet au moins une valeur d'adhérence dans X.*
Caractérisation séquentielle d'un fermé: *toute suite cv de F converge dans F (i.e. F contient les limites de ses suites cv).*
N.B.: $\forall (x_n)$ cv →l, on a $\{x_n/n\in\mathbb{N}\}\cup\{l\}$ est compacte.
Les compacts sont les fermés bornés:
compact ⇒ fermé borné: Soit X compact et (x_n) suite de X convergente vers x, alors elle admet au moins une val. d'adh. y dans X, et une sous-suite (x_p) cv →y. Or x=y, donc x∈X, donc X fermé.
Borné: par l'absurde; une suite non bornée n'aurait pas de valeur d'adhérence.
fermé borné ⇒ compact: Comme les normes sont équivalentes, on peut travailler en norme ∞. Comme Id_E homéomph. (Pté 3), les fermés sont les mêmes pour les deux normes. On peut donc se ramener, quitte à identifier ℂ et ℝ², à $\mathbb{R}^n$ muni de $\|...\|_\infty$. Il s'agit donc de mq. fermé borné de $\mathbb{R}^n$ ⇒ compact de $\mathbb{R}^n$. Or fermé borné ⇒ inclus dans un produit (fini) de "segments". Or chaque segment est compact, et un produit fini de compacts l'est aussi.
Prop.: "Tout segment de ℝ est compact".
Soit (x_n) une suite dans [a;b]. On a le
Théorème de Bolzano-Weierstrass: *Toute suite bornée de ℝ admet au moins une valeur d'adhérence dans ℝ.*
Soient donc (x_p) cv →x une suite extraite de (x_n), convergente. Or les (x_p) sont dans le fermé [a;b], donc x∈[a;b] et par suite toute suite de [a;b] admet une vl. d'adh. dans [a;b], i.e. [a;b]est compact.

(7) **Tout evn de dim. finie est complet:** M3 p.71.
Prop.: *Toute suite de Cauchy dans E est bornée.*
Soit (u_n) de Cauchy dans E. ∃N∈ℕ tq. ∀p,r∈ℕ, p≥N ⇒ $d(u_{p+r}, u_p)\le 1$. En particulier, ∀r∈ℕ, $d(u_{N+1+r}, u_{N+1}) \le 1$.
Donc $\forall r\in\mathbb{N}, \|u_{N+1+r}-u_{N+1}\|\le 1$.
Donc $\forall r\in\mathbb{N}, \left|\|u_{N+1+r}\|-\|u_{N+1}\|\right|\le 1$
Donc $\forall r\in\mathbb{N}, \|u_{N+1+r}\|\le 1+\|u_{N+1}\|$
(??? ou $\forall r\in\mathbb{N}, \|u_{N+1}\|\le 1+\|u_{N+1+r}\|$???)
Posant $M=Max(\|u_0\|,\|u_1\|,...,\|u_N\|,\|u_{N+1}\|+1)$, la suite (u_n) est bornée.
Prop.: *Toute partie compacte d'un evn est complète.*
Soit X compacte ⊂E. Soient (x_n) une suite de Cauchy de X, $\left(x_{\sigma(n)}\right)$ une suite extraite et x∈X sa limite.
Mq (x_n) cv →x.
Soit ε>0. $\exists N_1$: $\forall n\ge N_1$, $d\left(x_{\sigma(n)},x\right)\le\frac{\varepsilon}{2}$.
$\exists N_2$ tq. ∀p q $\ge N_2$, $d\left(x_p,x_q\right)\le\frac{\varepsilon}{2}$
Soit N∈ℕ tq. $N\ge N_1$ et $\sigma(N)\ge N_2$
Alors
$$p\ge N\Rightarrow d\left(x_p,x\right)\le d(x_p,x_{\sigma(N)})+d(x_{\sigma(N)},x)\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$
ce qui traduit la cv. de (x_n) vers x.
→**Retour à la Démo du th.3**:
Toute suite de Cauvhy dans E est bornée, et est donc incluse dans une boule fermée B'(0;M), qui est une partie fermée bornée de E, donc une partie compacte, donc complète. Donc cette suite de Cauchy cv, et E est complet.

(8) **Théorème de Riesz**: M3 p.104.
⇒ Si E est de dim. finie, sa B'(0,1) est fermée bornée donc compacte.
⇐ Supposons B=B'(0,1) compacte, et mq dim E finie.
$B\subset\bigcup_{a\in B}B(a;\frac{1}{2})$, (boules ouvertes).Or B est compacte,
donc ∃ n∈ℕ tq $B\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(a_i;\frac{1}{2})$ (compacité au sens de Borel-Lebesgue, on a extrait un sous-recouvrement fini). On pose alors $V=Vect\{a_1;...;a_n\}$, qui est un sev de dim. finie de E.
Montrons que V=E, i.e. que E⊂V puisque l'autre inclusion est acquise. Raisonnons par l'absurde:
Soit x∈E\V.
V est un sev de dim. finie, donc V est fermé, et par conséquent $d(x,V)=\inf_{y\in V}\|x-y\|=\xi>0$.
V est de dim. finie, donc:
$\exists p_F(x)\in V$ tq. $d\left(x,p_F(x)\right)=\xi$
Or $\xi=\inf_{y\in V}\|x-y\|$, et par définition de l'inf:
$\exists y_1\in V$ tq $d\left(x,y_1\right)=\|x-y_1\|=\frac{3}{2}\xi$.
Soit un tel y_1, posons $z=\frac{x-y}{\|x-y\|}$.
Par construction, $\|z\|=1$ ∈B, donc $\exists i_0$ tq. $z\in B\left(a_{i_0};\frac{1}{2}\right)$,
donc $0\le\|z-a_{i_0}\|\le\frac{1}{2}$, et par suite:
$0\le\|z-a_{i_0}\|.\|x-y\|\le\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\xi=\frac{3}{4}\xi$ (*). mais :
$$\|z-a_{i_0}\|.\|x-y\|=\left\|\frac{x-y}{\|x-y\|}-a_{i_0}\right\|.\|x-y\|$$
$$=\frac{\|x-y\|}{\|x-y\|}\left\|x-y-a_{i_0}\|x-y\|\right\|$$
$$=\left\|\underbrace{x-y-a_{i_0}\|x-y\|}_{\in V}\right\|\ge d\left(x,V\right)=\xi$$

Ce qui contredit (*), donc V=E.

(9) **Continuité des app. lin. en dim. finie**: M3 p.65.
L'équivalence de la norme ∞ et de la norme N sur E implique: $\exists M\in\mathbb{R}_+$ tq $\forall x\in E$, $N_\infty(x)\leq MN(x)$. En particulier, si f est une ap. lin., on a:

$$\|f(x)\|_F = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\right\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.\|f(e_i)\|_F$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F\right) N_\infty(x) \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F\right) M}_{C} .N(x)$$

$$= C.N(x)$$

Donc f est C-lipschitzienne, et donc continue.